

欧拉反正切展开式的推导

Abel

1 说明

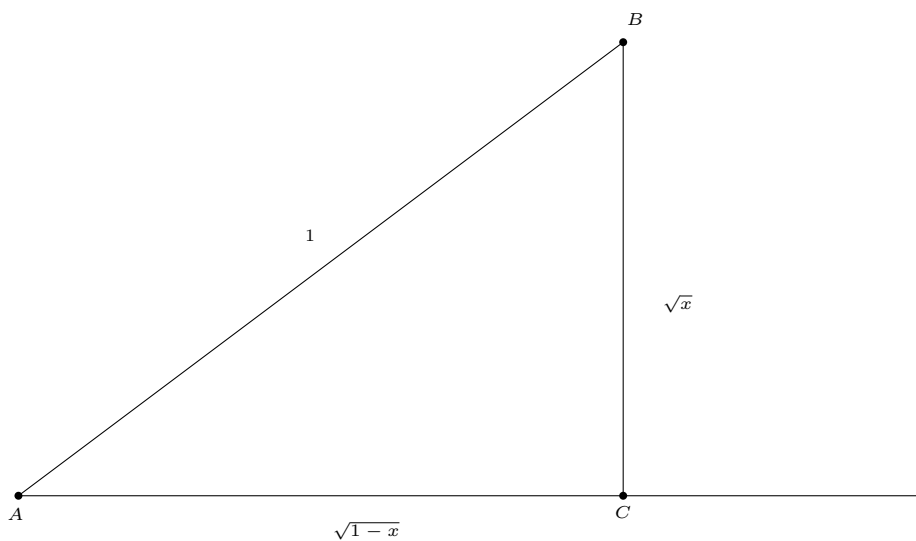
欧拉的一种反正切展开式是这样的

$$\arctan(t) = \frac{t}{1+t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right)^n$$

下面其记录推导过程

2 同一个角，两种表达

如图的三角形 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = Rt\angle$, $AB = 1, BC = \sqrt{x}$, 则 $AC = \sqrt{1-x}$.

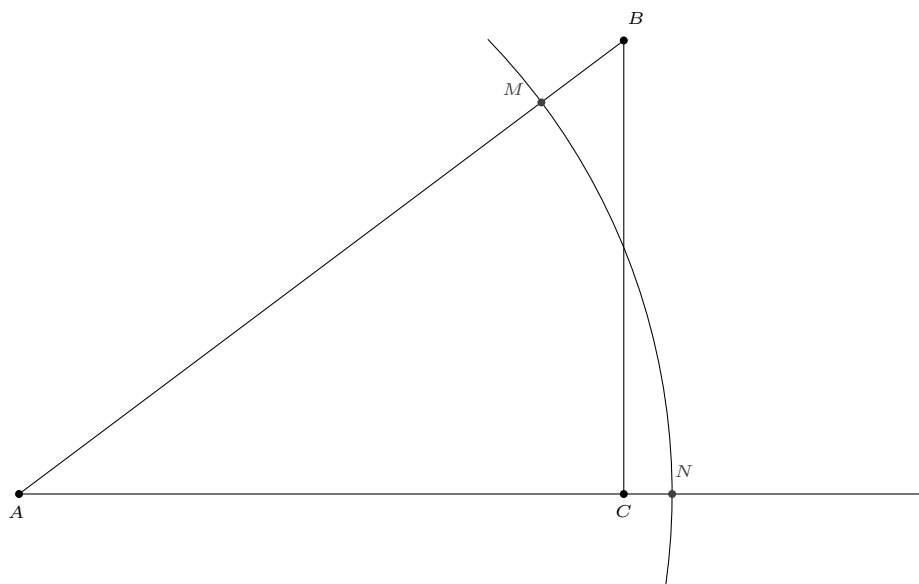


那么 $\angle A$ 可以有两种表达方式, $\arcsin \sqrt{x}$ 或者 $\arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}}$. 且这两种表达是等价的.

$$A = \arcsin \sqrt{x} = \arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

3 一个实际的几何问题

现要求以点 A 为圆心, 作一段圆弧 MN , 交 AB 于点 M , 交直线 AC 于点 N . 要使扇形 AMN 的面积等于三角形 ABC 的面积, 那么, 求这段弧的半径是多少.



显然半径大于 AC , 小于 AB . 设半径为 r , 设角 A 为 α , 则, 扇形面积

$$S_{\text{扇形}AMN} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}\alpha r^2$$

三角形面积

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(\sqrt{x})(\sqrt{1-x}) = \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$$

为了求半径, 令两者相等, 得到方程

$$\frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$$

解得

$$r^2 = \frac{\sqrt{x-x^2}}{\alpha}$$

4 反正切-用角的正切值表示角自身

得到上面那个等式, 右边有 α , 设法用正切值来表示 α . 为了方便计算, 设 $y = \frac{1}{r^2}$, 前文已经定义角 α 也可用反正弦来表示. 那么

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \cdot \arcsin \sqrt{x}$$

采用隐函数求导, 可以得到一个微分方程

$$y(1-2x) + 2y'(x-x^2) = 1$$

假设已经得到 y 的展开式, 是 x 的多项式 (无穷项), 记为

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

把 y 的多项式展开连同它的导数代入上面的微分方程, 整理后得到

$$a_0 + (3a_1 - 2a_0)x + (5a_2 - 4a_1)x^2 + \cdots + [(2n+1)a_n - 2na_{n-1}]x^n + \cdots = 1$$

通过比较系数, 可知

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{2n}{2n+1} \cdot a_{n-1}$$

依此递推，得

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\vdots$$

因此

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \arcsin \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot x^n$$

$$\arcsin \sqrt{x} = \sqrt{x-x^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot x^n$$

再用反正切表示相同的角

$$\arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \sqrt{x-x^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot x^n$$

5 换元

在上式中，令

$$t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

则

$$x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\sqrt{x-x^2} = \frac{t}{1+t^2}$$

由此得到

$$\arctan(t) = \frac{t}{1+t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right)^n$$