牛顿是如何计算圆周率的

Abel

2022 年 9 月 4 日

目录

1 二项式定理

二项式定理（英语：binomial theorem），又称牛顿二项式定理，由艾萨克 · 牛顿于 1664 年、1665 年间提出。该定理给出两个数之和的整数次幂诸如展开为类似项之和的恒等式。二项式定理可以推广到任意实数次幂，即广义二项式定理。

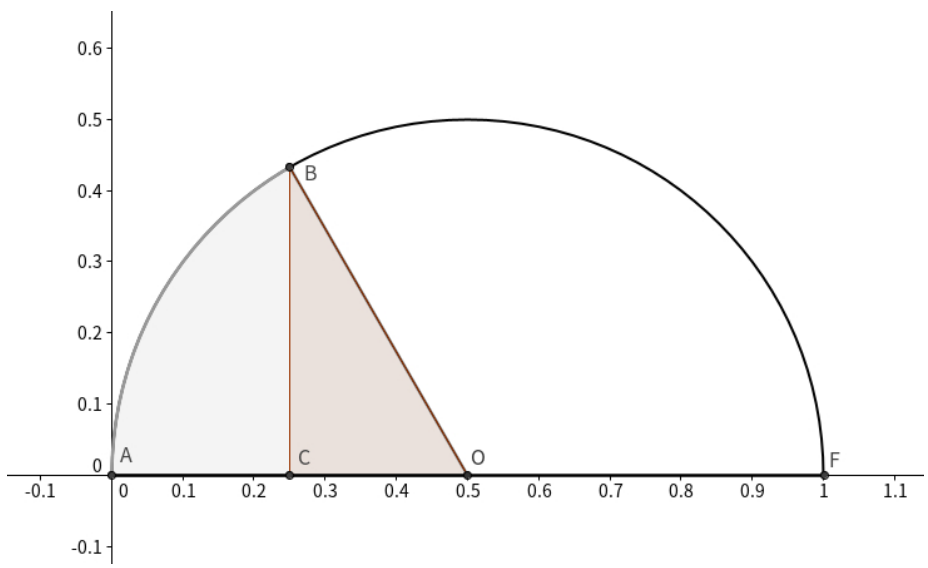
这里指的是广义二项式定理，因为涉及到分数幂。

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k$$

其中

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{(\alpha)_k}{k!}$$

2 求面积方法



在平面直角坐标系下，A 为坐标原点.
牛顿以点 $O(\frac{1}{2},0)$ 为圆心,$\frac{1}{2}$ 为半径，作一个圆.
作角 $\angle AOB$ 为 $60°$,B 在圆周上. 如图.
作 BC 垂直于 x 轴，交 x 轴于点 C.
那么整个圆的面积是 $\frac{\pi}{4}$.
扇形 AOB 的面积是 $\frac{\pi}{24}$.

下面用微积分的方法求扇形 AOB 的面积. 其中 $\triangle BOC$ 的面积可以直接计

算. 需要用到微积分计算的是弧 $\widehat{AB}$ 下的面积.

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle BCO} &= \frac{1}{2} \cdot OC \cdot BC \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{32}
\end{aligned}
$$

圆的方程是

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$$

转换成函数的形式

$$y = x^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}}$$

下面对函数进行积分

$$S_{ABC} = \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}} dx$$

应用二项式定理，将 $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ 展开，将 $x^{\frac{1}{2}}$ 分配进入，然后逐项积分.

$$
\begin{aligned}
S_{ABC} &= \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k}(-x)^k dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} x^{k+\frac{1}{2}} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} (\frac{2}{2k+3}) x^{k+\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{4}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{2}{2k+3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+3}
\end{aligned}
$$

由上，有

$$\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}}{32} + S_{ABC}$$

所以，π 的表达式是

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{2^{2k}} (\frac{6}{2k+3})$$

如果把 $\sqrt{3}$ 写成

$$\sqrt{3} = 2(1-\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$$

并且用二项式定理展开，然后合并两部分的结果，可以得到

$$\pi = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{\frac{1}{2}}{r} \cdot \frac{3}{2^{2r+1}} \cdot \frac{2r+7}{2r+3}$$

3　反正弦方法

牛顿的另一个方法是：利用反正弦的展开式进行计算.

先求导数

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

然后积分

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{r} (-x^2)^r dx \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}}{r} \cdot \frac{1}{2r+1} \cdot x^{2r+1}\end{aligned}$$

代入一个适当的值，就可以计算了. 如

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin(\frac{1}{2})$$

则

$$\pi = 6 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}}{r} \frac{1}{2^{2r+1}(2r+1)}$$

4 数值表

列举前几个值

$$\binom{\frac{1}{2}}{r}$$

1 1/2 -1/8 1/16 -5/128 7/256 -21/1024 33/2048 -429/32768 715/65536 -2431/262144

$$\binom{-\frac{1}{2}}{r}$$

1 -1/2 3/8 -5/16 35/128 -63/256 231/1024 -429/2048 6435/32768 -12155/65536 46189/262144

拉赞助

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点