欧拉反正切公式的证明

Abel

2022 年 9 月 8 日

1 欧拉反正切公式与莱布尼兹公式的比较

$$\arctan(t) = \frac{t}{1+t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(\frac{t^2}{1+t^2})^n \quad (t \in R) \tag{1}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad (|x| \leq 1) \tag{2}$$

欧拉的公式是第一个，莱布尼兹用的公式是第二个。第二个公式也叫格里高利 (J.Gregory) 公式，当 $x = 1$ 时，得到的就是大家最喜闻乐见的莱布尼兹公式。比较两者的不同，主要是自变量的定义域不同。欧拉的公式显然更具备普遍性，在实数范围内总能收敛。

2 这个双阶乘的比原来是个定积分

如果推导过 $Wallis$ 连乘公式，就会发现，欧拉公式中的双阶乘之比是个定积分。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}$$

下面简略证明之，由积分公式

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

在上式中设定积分界限，0 到 $\frac{\pi}{2}$，可得

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \quad for \quad n > 1$$

然后用一个奇数 $2m+1$ 代替 n，“递归下降”，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

即有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1}\theta d\theta = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

3 证明

证明. 把这个积分代入欧拉公式的右边，得到

$$
\begin{aligned}
right &= \frac{t}{1+t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(\frac{t^2}{1+t^2})^n \\
&= \frac{t}{1+t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta(\frac{t^2}{1+t^2})^n d\theta \\
&= \frac{t}{1+t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2\theta(\frac{t^2}{1+t^2})\right]^n \sin\theta d\theta \\
&= \frac{t}{1+t^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sin^2\theta(\frac{t^2}{1+t^2})\right]^n \sin\theta d\theta \\
&= \frac{t}{1+t^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta d\theta}{1-\sin^2\theta(\frac{t^2}{1+t^2})} \\
&= t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta d\theta}{1+t^2-t^2\sin^2\theta} \\
&= t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-d(\cos\theta)}{1+t^2\cos^2\theta} \\
&= t\int_0^{1}\frac{du}{1+t^2u^2} \\
&= t\int_0^{t}\frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{t} \\
&= \int_0^{t}\frac{1}{1+v^2}dv \\
&= \arctan t \\
&= left
\end{aligned}
$$

So, we get

$$\arctan(t) = \frac{t}{1+t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(\frac{t^2}{1+t^2})^n \quad (t \in R)$$

$\square$

拉赞助

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点