

算术-几何平均算法

Abel

算术-几何平均算法 (AGM) 二次收敛: 每次迭代可以使得准确数字的位数翻倍. AGM 算法有着悠久的历史, 可以追溯到高斯与勒让德. 1975 年 Richard Brent 和 Eugene Salamin 发现这种算法可以用来计算圆周率.

算术平均总比几何平均大, 即

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

算术-几何平均, 可记作 $agm(a, b)$, 计算时重复的使用算术平均和几何平均. 给定初始值 $a_0 = a, b_0 = b$, 进行如下迭代

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

直到 a_n 和 b_n 达到理想的精度. 例如, 1 和 9 的算术平均为 5, 几何平均为 3, agm 为 3.9326.

AGM 算法的强大特征不仅仅依赖于最终的结果, 而且还依赖于运算过程中产生的结果. 计算圆周率就是一个例子. 运用如下计算

$$M = agm\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

迭代过程中，记录每一步的变化

$$c_n = a_{n+1} - a_n$$

然后，令

$$S = \frac{1}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2$$

最后

$$\pi = \frac{M^2}{S}$$

拉赞助

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点

