

阿基米德是如何计算圆周率的

2022 年 9 月 4 日

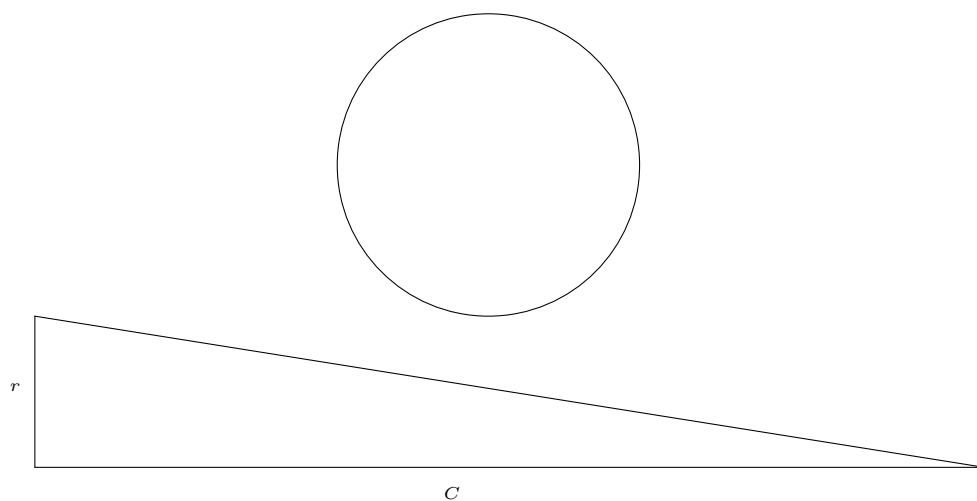
目录

1 命题一	2
2 命题二	4
3 命题三	5
3.1 用外切多边形, 证明 $\pi < \frac{22}{7}$	6
3.1.1 平分 30° 角	6
3.1.2 平分 15° 角	7
3.1.3 平分 7.5° 角	8
3.1.4 平分 3.75° 角	8
3.2 用内接多边形, 证明 $\pi > \frac{223}{71}$	10
3.2.1 平分 30° 角	10
3.2.2 平分 15° 角	11

目录	2
3.2.3 平分 7.5° 角	12
3.2.4 平分 3.75° 角	13

1 命题一

命题 1 任何一个圆面积等于一个直角三角形，它的夹直角的一边等于圆的半径，而另一边等于圆的周长。



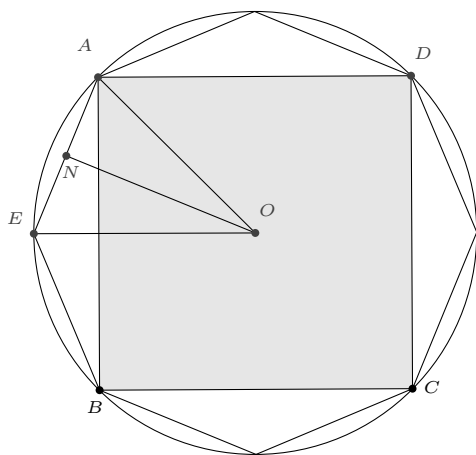
这个圆面积公式即 $S = \frac{1}{2}Cr$ 。

证明 1 设 $ABCD$ 是给定的圆， K 为所述三角形那么，如果圆不等于 K ，它必定大于，或小于 K 。

I. 如果可能，设圆大于 K 。

设一个内接正方形为 $ABCD$ ，平分弧 AB 、 BC 、 CD 、 DA 。然后再等分（如果需要）其一半，继续分下去，直至以分点为顶点的内接多边形边上的弓形之和小于圆面积与 K 的差。

这样多边形面积大于 K 。



设 AE 是它的任意一边、且由圆心 O 作 ON 重直 AE . 则 ON 小于圆的半径, 即小于 K 中夹直角的一边, 且多边形的周长小于圆的周长, 即小于 K 中夹直角的另一边.

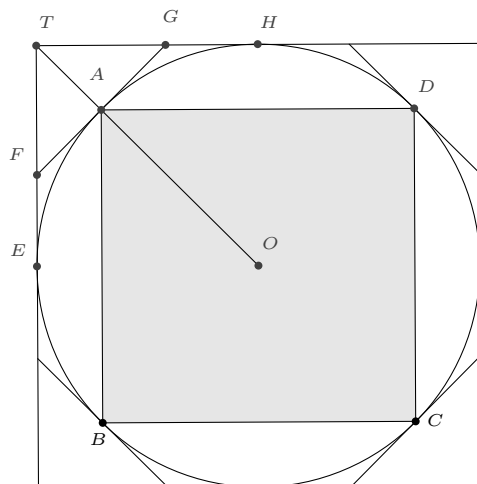
所以, 多边形的面积小于 K , 这与已知条件矛盾.

故圆的面积不大于 K .

II. 如果可能, 设圆小于 K .

作外切正方形, 设其切圆于点 E, H . 两相邻边交于 T , 平分相部两切点间的弧且在分点上作切线, 设 A 是弧 EH 的中点、且 FAG 为 A 上的切线, 则角 TAG 是一个直角, 故 $TG > GA > GH$.

于是三角形 FTG 的面积大于 $TEAH$ 面积的一半. 类似地, 如果弧 AH 被平分且在分点作切线, 就可以从面积 GAH 截出一个大于它的一半的面积如此, 继续这种作法, 最终将作出一个外切多边形, 在它与圆之间截得的许多空间面积之和小于 K 与圆面积之差. 这样一来, 多边形面积小于 K .



现在，由 O 作多边形任意一边的垂线，它等于圆的半径，这时多边形的周长大于圆的周长，于是得到多边形的面积大于三角形 K ；这是不可能的。

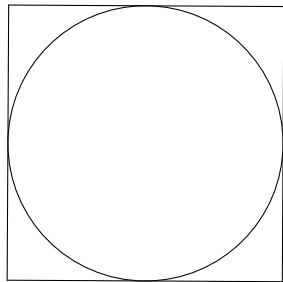
所以，圆面积不小于 K 。

因而，圆面积既不大于又不小于 K ，它就等于它。

2 命题二

命题 2 一个圆面积比它的直径上的正方形如同 11 比 14。

这个命题依赖于命题三得证。



$$S_{circle} = \pi R^2$$

$$S_{square} = 4R^2$$

$$\frac{S_{circle}}{S_{square}} = \frac{\pi}{4}$$

如果取 $\pi = \frac{22}{7}$ ，则得到比值为 $\frac{11}{14}$ 。

3 命题三

命题 3 任何一个圆周与它的直径的比小于 $3\frac{1}{7}$ 而大于 $3\frac{10}{71}$ 。

改写为

$$\frac{OA}{AD} = \frac{OC + OA}{AC} > \frac{265 + 306}{153} = \frac{571}{153}$$

由勾股定理, $OD^2 = OA^2 + AD^2$, 有

$$\begin{aligned} \frac{OD^2}{AD^2} &= \frac{OA^2 + AD^2}{AD^2} \\ &> \frac{571^2 + 153^2}{153^2} \\ &= \frac{349450}{153^2} \end{aligned}$$

开方后

$$\frac{OD}{AD} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

3.1.2 平分 15° 角

作角 AOD 的平分线, 交 AD 于点 E , 同理, 有

$$\begin{aligned} \frac{OA}{AE} &= \frac{OD + OA}{AD} \\ &> \frac{591\frac{1}{8} + 571}{153} \\ &= \frac{1162\frac{1}{8}}{153} \end{aligned}$$

由此可得:

$$\begin{aligned} \frac{OE^2}{AE^2} &> \frac{(1162\frac{1}{8})^2 + 153^2}{153^2} \\ &> \frac{1373943\frac{33}{64}}{153^2} \end{aligned}$$

故

$$\frac{OE}{AE} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

3.1.3 平分 7.5° 角

作角 AOE 的平分线, 交 AE 于点 F

$$\begin{aligned}\frac{OA}{AF} &> \frac{1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8}}{153} \\ &= \frac{2334\frac{1}{4}}{153}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{OF^2}{AF^2} &> \frac{(2334\frac{1}{4})^2 + 153^2}{153^2} \\ &= \frac{5472132\frac{1}{16}}{153}\end{aligned}$$

故

$$\frac{OF}{FA} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$

3.1.4 平分 3.75° 角

设 OG 平分交 AOF , 交 AF 于点 G

$$\begin{aligned}\frac{OA}{AG} &> \frac{2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4}}{153} \\ &= \frac{4673\frac{1}{2}}{153}\end{aligned}$$

角 AOC 是直角的三分之一，经过四次平分后

$$\angle AOG = \frac{1}{48} RT \angle$$

OA 的两倍是圆的直径， AG 的两倍是圆外切正 96 边形一边的长，设圆的直径为 ϕ ，则

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{C_{out96}} &= \frac{2 \times OA}{2 \times AG \times 96} \\ &> \frac{4673\frac{1}{2}}{153 \times 96} \\ &= \frac{4673\frac{1}{2}}{14688} \end{aligned}$$

变更分子和分母的位置，有

$$\begin{aligned} \frac{C_{out96}}{\phi} &< \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} \\ &= 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} \\ &< 3 + \frac{1}{7} \end{aligned}$$

圆的周长记为 C_{circle} ，圆周长小于外切多边形的周长，

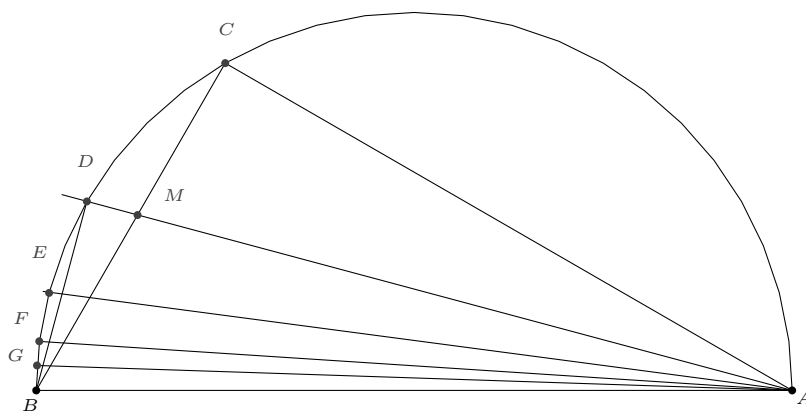
$$\pi = \frac{C_{circle}}{\phi} < \frac{C_{out96}}{\phi} < \frac{22}{7}$$

故得到

$$\pi < \frac{22}{7}$$

3.2 用内接多边形, 证明 $\pi > \frac{223}{71}$

3.2.1 平分 30° 角



设 AB 是圆的直径, 作 AC 与 AB 夹角 $\frac{1}{3}RT\angle$. 连接 BC . 则

$$\frac{AC}{BC} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

作 $\angle CAB$ 的平分线, 交圆于点 D , 交 BC 于点 M . 则

$$\angle BAD = \angle MAC = \angle MBD$$

且 $\angle C = \angle D = RT\angle$.

可得 $\triangle ADB, \triangle ACM, \triangle BDM$ 相似.

所以

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{DB} &= \frac{BD}{DM} \\
&= \frac{AC}{CM} = \frac{AB}{BM} \\
&= \frac{AB + AC}{BM + CM} \\
&= \frac{AB + AC}{BC}
\end{aligned}$$

而 $\frac{AB}{BC} = 2 = \frac{1560}{780}$, $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, 故

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AB + AC}{BC} < \frac{2911}{780}$$

故

$$\frac{AB^2}{BD^2} < \frac{2911^2 + 780^2}{780^2} = \frac{9082321}{780^2}$$

开方得

$$\frac{AB}{BD} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

3.2.2 平分 15° 角

设 AE 平分 $\angle BAD$, 交圆于点 E , 连接 BE . 同理

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{EB} &= \frac{AB + AD}{BD} \\
&< \frac{3013\frac{3}{4} + 2911}{780} \\
&= \frac{5924\frac{3}{4}}{780} \\
&= \frac{1823}{240}
\end{aligned}$$

故

$$\frac{AB^2}{BE^2} < \frac{1823^2 + 240^2}{240^2} = \frac{3380929}{57600}$$

开方后得

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

3.2.3 平分 7.5° 角

设 AF 平分 $\angle BAE$, 交圆于点 F . 这样

$$\begin{aligned}
\frac{AF}{BF} &= \frac{AB + AE}{BE} \\
&< \frac{3661\frac{9}{11}}{240} \\
&= \frac{1007}{66}
\end{aligned}$$

由此, 得

$$\begin{aligned}\frac{AB^2}{BF^2} &< \frac{1007^2 + 66^2}{66^2} \\ &= \frac{1018405}{4356}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{AB}{BF} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

3.2.4 平分 3.75° 角

设 AG 平分 $\angle BAF$, 交圆于 G . 则

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AB + AF}{BF} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

又

$$\frac{AB^2}{BG^2} < \frac{(2016\frac{1}{6})^2 + 66^2}{66^2} = \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356}$$

所以

$$\frac{AB}{BG} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

由此, 有

$$\frac{BG}{AB} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}$$

$\angle BAG$ 把是直角的三分之一经过四次平分所得, 等于一个直角的 $\frac{1}{48}$.
 BG 所对的圆心角为 $\frac{1}{24}RT\angle$, 因此, BG 是圆内接正 96 边形的一边.

$$\begin{aligned}
\frac{C_{circle}}{AB} &> \frac{C_{inner_{96}}}{AB} \\
&> \frac{96 \times 66}{2017^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{6366}{2017^{\frac{1}{4}}} \\
&> 3\frac{10}{71}
\end{aligned}$$

即有 $\pi > 3\frac{10}{71}$.

综上, 有

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

拉赞助

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点

