计算圆周率的 BBP 公式之证明

Abel

2022 年 8 月 25 日

1 计算 π 的 BBP 公式

1995 年，三位美国算法学家 Bailey-Borwein-Plouffe 共同提出圆周率的一个 BBP 公式

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

2 证明

证明. 对于任意 $p < 8$，有

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{p-1}}{1-x^8} dx &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} x^{p-1+8k} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p+8k} x^{p+8k} \Big|_0^{1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2^{p/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k (8k+p)}
\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+p)}=2^{p/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{p-1}}{1-x^8}dx$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)$$

$$=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+1)}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+4)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+5)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k(8k+6)}$$

$$=4\times 2^{1/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{1-1}}{1-x^8}dx$$

$$-2\times 2^{4/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{4-1}}{1-x^8}dx$$

$$-2^{5/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{5-1}}{1-x^8}dx$$

$$-2^{6/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{6-1}}{1-x^8}dx$$

$$=\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx$$

令 $y=\sqrt{2}x$，代入上式，有

$$\int_0^1 \frac{4-2y^3-y^4-y^5}{1-\frac{y^8}{16}}dy$$

$$= \int_0^1 \frac{-(y^2+2y+2)(y^2+2)(y-1)}{-\frac{1}{16}(y^2+2y+2)(y^2-2y+2)(y^2+2)(y^2-2)}dy$$

$$= \int_0^1 \frac{16y-16}{y^4-2y^3+4y-4}dy$$

$$= \int_0^1 \frac{16y-16}{(y^2-2)(y^2-2y+2)}dy$$

$$= \int_0^1 \frac{4y}{y^2-2}dy - \int_0^1 \frac{4y-8}{y^2-2y+2}dy$$

$$= 2\int_0^1 \frac{2y}{y^2-2}dy - 2\int_0^1 \frac{2y-2}{y^2-2y+2}dy + 4\int_0^1 \frac{1}{(y-1)^2+1}dy$$

$$= 2\ln(y^2-2)\Big|_0^1 - 2\ln(y^2-2y+2)\Big|_0^1 + 4\arctan(y-1)\Big|_0^1$$

$$= 2\ln(-1) - 2\ln(-2) + 2\ln 2 - 4\arctan(-1)$$
$$= \pi$$

□