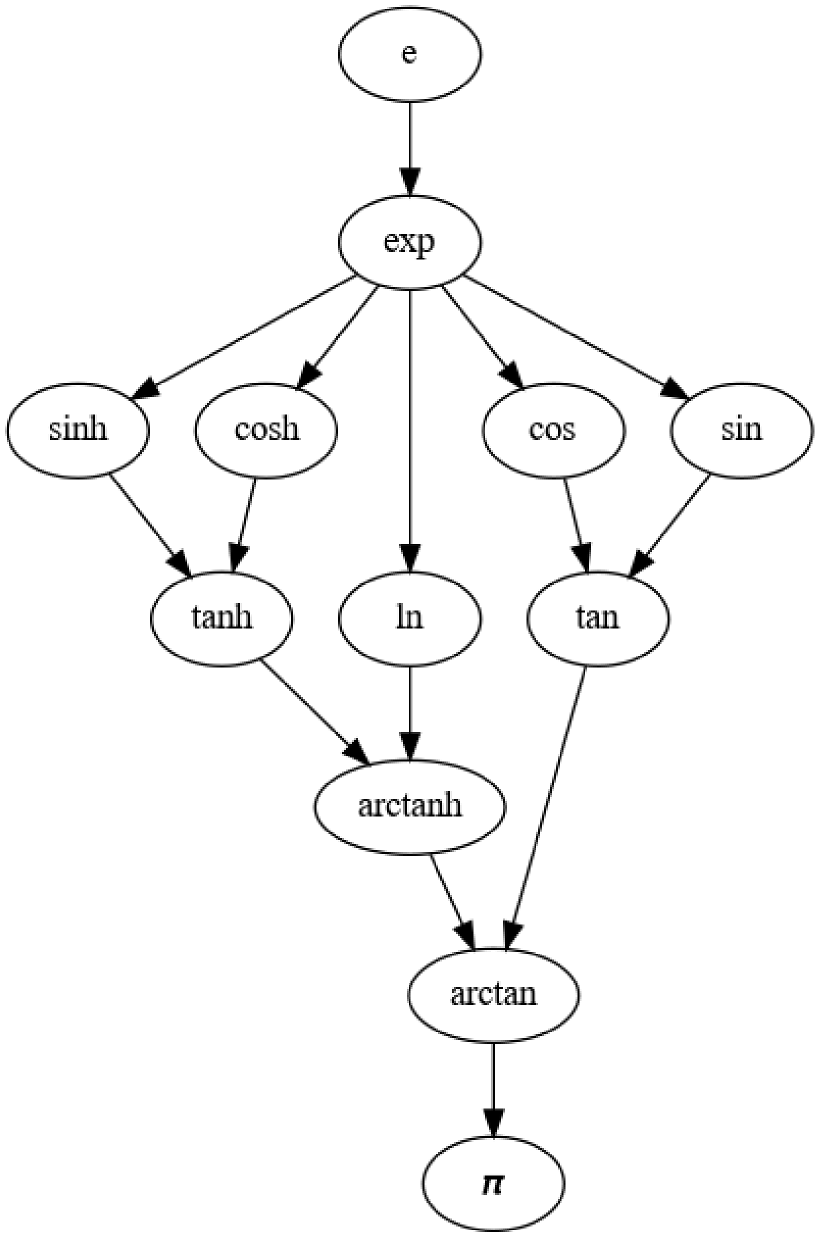
从 e 到 π, 反正切公式是怎样被展开的

Abel

1 脉络图

反正切的一种展开式曾广泛应用于 π 的计算。也许前人是先发现，后证明的。本文复习一下这个展开式得到的过程。用 10 个函数联系 e 与 π.


e
exp
sinh
cosh
cos
sin
tanh
ln
tan
arctanh
arctan
π

2 最美公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1}$$

文中会用到这个公式。欧拉是先发现某些展开式，然后得到这个公式。我们则可以用这个公式，再次推导出某些展开式。本文保留一些运算过程，作为复习之用。

3 双曲函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{3}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{4}$$

下面对 $\tanh x$ 进行演算，记

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

则

$$\frac{y}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1+y}{2e^x} = \frac{1-y}{2e^{-x}}$$

所以

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$$

取对数得到

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

由此得到反双曲正切函数

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \tag{5}$$

4 对数函数

对数函数的定义是

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{u} du \tag{6}$$

由序列

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

两边积分, 得到

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

所以

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

由此得到反双曲正切函数的展开式

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

5 三角函数

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{7}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{8}$$

$$\tan x = -i \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \tag{9}$$

下面对 $\tan x$ 进行演算，记

$$y = \tan x = -i \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

则

$$iy = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

由此，有

$$\frac{iy}{e^{ix} - e^{-ix}} = \frac{1}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{1 + iy}{2e^{ix}} = \frac{1 - iy}{2e^{-ix}}$$

则

$$\frac{1 + iy}{1 - iy} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{2ix}$$

取对数，得到

$$2ix = \ln \frac{1 + iy}{1 - iy}$$

即有

$$x = -i \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+iy}{1-iy}$$

由此得到反正切函数

$$\arctan x = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+ix}{1-ix} \tag{10}$$

对比前面的反双曲正切函数，可知

$$\arctan x = (-i) \tanh^{-1}(ix)$$

按照反双曲正切函数的展开式，得到反正切函数的展开式

$$\begin{aligned} \arctan x &= (-i) \tanh^{-1}(ix) \\ &= (-i) \left[ix + \frac{(ix)^3}{3} + \frac{(ix)^5}{5} + \frac{(ix)^7}{7} + \cdots \right] \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \end{aligned}$$

即

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

6 应用

在级数中

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

令 $x = 1$, 得到莱布尼兹公式

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

用一个级数计算会比较慢，于是人们寻找了多种组合的方式，例如

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$$

或

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$$

或

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan(\frac{1}{18}) + 8\arctan(\frac{1}{57}) - 5\arctan(\frac{1}{239})$$

等等. 这些组合方式是无穷无尽的.

7 捷径

在下面的式子中

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

用 $(-x^2)$ 代替 x，得到

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

两边积分，得到

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

还应对定义域和收敛性进行讨论.

拉赞助

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点