π 是无理数

1 证明前的准备工作

这里给出一个“初等”的证明。在证明之前，进行两项考察。

1.1 第一项考察

考察函数

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

在 $0 < x < 1$ 的条件下它满足

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$$

通过考虑实际乘开 $x^n(1-x)^n$ 所得的式子，揭示出函数 f_n 的一个重要性质. 此式 x 的幂的最低次数为 n，最高次数为 $2n$，于是 f_n 可以写成如下形式

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$$

其中 c_i 是整数. 很清楚，此式有

$$f_n^{(k)}(0) = 0, \qquad 若 \quad k < n \quad 或 \quad k > 2n$$

其次

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}[n!c_n + 含x的各项]$$

$$f_n^{n+1}(x) = \frac{1}{n!}[(n+1)!c_{n+1} + 含x的各项]$$

$$\vdots$$

$$f_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!}[(2n)!c_{2n}]$$

这表示

$$f_n^{(n)}(0) = c_n$$
$$f_n^{(n+1)}(0) = (n+1)c_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$f_n^{(2n)}(0) = (2n)(2n-1)\cdots(n+1)c_{2n}$$

这里，各式右端都是整数，于是

$$f_n^{(k)}(0)对于所有的k都是整数$$

由关系

$$f_n(x) = f_n(1-x)$$

可以推出

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$$

从而

$$f_n^{(k)}(1)对于所有的k也是整数$$

1.2 第二项考察

若 a 是任意数，且 $\varepsilon > 0$, 则对于充分大的 n，我们将有

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$$

要证明这一点，只需要注意，如果 $n \geq 2a$，则

$$\frac{a^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}$$

现设 n_0 是满足 $n_0 \geq 2a$ 的任意自然数，则不论值 $\frac{a^n}{(n_0)!}$

可能等于多少，下面各值都满足

$$\begin{aligned}
\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n_0!} \\
\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n_0!} \\
&\vdots \\
\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} &< \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0!)}
\end{aligned}$$

若 k 大到满足

$$\frac{a^{n_0}}{(n_0)!\varepsilon} < 2^k$$

则

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \varepsilon$$

2 证明 π^2 是无理数

定理 1. π^2 是无理数.

(注意：由 π^2 是无理数可以推导出 π 是无理数，因为如果 π 是有理数，则 π^2 一定也是有理数.)

证明. 假设 π^2 是有理数，则

$$\pi^2 = \frac{a}{b}$$

对某整数 a 和 b 成立. 令

1. $$G(x) = b^n[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)]$$

   注意每一个因子

   $$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n (\frac{a}{b})^{n-k} = a^{n-k} b^k$$

   都是整数. 因为 $f_n^{(k)}(0)$ 和 $f_n^{(k)}(1)$ 都是整数，这就证明

   $$G(0)和G(1)都是整数.$$

2. 将 $G(x)$ 微分两次，得

   $$G^{''}(x) = b^n[\pi^{2n} f_n^{''}(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{2n+2}(x)]$$

   其中，最后一项 $(-1)^n f_n^{2n+2}(x)$ 为 0.

3. 将上述两式相加，给出

   $$G^{''}(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x)$$

令

$$H(x) = G'(x) sin\pi x - \pi G(x) cos\pi x$$

由上，得

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x)\cos\pi x + G''(x)\sin\pi x - \pi G'(x)\cos\pi x + \pi^2 G(x)\sin\pi x \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)]\sin\pi x \\ &= \pi^2 a^n f_n(x)\sin\pi x \end{aligned}$$

又根据微积分第二基本定理，

$$\begin{aligned}
&\pi^2\int_0^1 a^n f_n(x)\sin\pi x dx \\
&= H(1)-H(0) \\
&= G'(1)\sin\pi-\pi G(1)\cos\pi-G'(0)\sin 0+\pi G(0)\cos 0 \\
&= \pi[G(1)+G(0)]
\end{aligned}$$

因而

$$\pi\int_0^1 a^n f_n(x)\sin\pi x dx\text{是一个整数}$$

另一方面，

$$0<f_n(x)<\frac{1}{n!},\text{对于}0<x<1$$

于是

$$0<\pi a^n f_n(x)\sin\pi x<\frac{\pi a^n}{n!},\text{对于}0<x<1$$

所以

$$0<\pi\int_0^1 a^n f_n(x)\sin\pi x dx<\frac{\pi a^n}{n!}$$

这一推理与 n 的值无关. 现假设 n 足够大，则

$$0<\pi\int_0^1 a^n f_n(x)\sin\pi x dx<\frac{\pi a^n}{n!}<1$$

这是荒谬的，因为前文证明这个积分是一个整数，而在 0 和 1 之间不存在一个整数. 因而，最初的假设一定不正确. 所以：π^2 是无理数.

□

定理 2. π 是无理数.