阿基米德的开方秘术

Abel

2022 年 8 月 29 日

阿基米德在《圆的度量》中，用几何学的方法求解了圆周率。在求解之初，给出了 $\sqrt{3}$ 的两个近似值。他指出

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

那么，他是怎样进行开方运算的呢？这两个近似值是怎样找到的呢？阿基米德的开方运算可谓是“不开之开”，只要找到分数近似值，就不必再开方了。后人推测，他可能使用了佩尔方程来求解近似值。

佩尔方程，是一种不定二次方程。Pell 方程，古希腊和印度的数学家对此类方程的研究做了最早的贡献，由费马首先进行了深入研究，拉格朗日给出了解决方案，但后此类方程来却被欧拉误记为佩尔提出，并写入他的著作中。后人多称佩尔方程沿续。

设 d 是正整数，且非完全平方数。下面的方程称为佩尔方程：

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{1}$$

(这里的 d 是一个正整数，不是微分符号 dy。)

阿基米德要求 $\sqrt{3}$ 的有理数近似值，在那个方程中，把 d 换成 3 就可以了。

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

如果不是仅仅考虑整数解，那么这个方程可以看成一个双曲线的方程。

$$x^2 - \frac{y2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1$$

它有渐进线 $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$

其中一条渐进线上的点满足 $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$

这就是说，求到 Pell 方程的解越大，双曲线上的整点就越來越靠近渐进线，$\frac{x}{y}$ 就越接近 $\sqrt{3}$.

那么，怎样解这个方程呢?

幸运的是，这个方程可以用肉眼观察出一组比较简单的解，$(2, 1)$。只要有了一组解，其它的解就容易求了。

根据第一组解，构造一个无理数 $x_0 + y_0\sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$, 然后用这个无理数不断的自乘 (平方)，或者立方... 得到的结果，有理部分对应于 x, 无理部分的系数对应于 y.

例如 $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, 那么 $(7, 4)$ 也是原方程的解。

这个方程的前几个解依次是:

$$
\begin{aligned}
&(2,1)\\
&(7,4)\\
&(26,15)\\
&(97,56)\\
&(362,209)\\
&(1351,780)\\
&(5042,2911)\\
&(18817,10864)\\
&(70226,40545)\\
&(262087,151316)\\
&(978122,564719)\\
&(3650401,2107560)\\
&(13623482,7865521)\\
&(50843527,29354524)\\
&(189750626,109552575)
\end{aligned}
$$

其中,

$$(2+\sqrt{3})^6 = 1351 + 780\sqrt{3}$$

这就得到了 $(1351,780)$ 这组解. 且 $\sqrt{3} < \frac{1351}{780}$.

这个方程得到的解,如 $\frac{1351}{780}$ 都大于 $\sqrt{3}$,那么,比 $\sqrt{3}$ 小的解是怎样得到的呢?这就用到了另一个方程:

$$x^2 - 3y^2 = -2$$

写成普通的形式,就是

$$x^2 - dy^2 = k \tag{2}$$

其中 $k \neq 1$

这个方程右边不是 1, 不是标准的佩尔方程, 记方程 (2) 的第一组根为 (p, q), 方程 (1) 的任意一组根为 (α, β), 如果将两个方程相乘，可以得到

$$(p^2 - dq^2)(\alpha^2 - d\beta^2) = k$$

经过复杂的整理，配方, 可以得到

$$(p\alpha \pm dq\beta)^2 - d(p\beta \pm q\alpha)^2 = k$$

由此可见，这个方程的解就是

$$\begin{cases} x = p\alpha \pm dq\beta \\ y = p\beta \pm q\alpha \end{cases}$$

同样幸运的是，方程 $x^2 - 3y^2 = -2$，也可以用肉眼观察的一组根，$(1, 1)$，那么 $p = 1$,$q = 1$, 只取加号，这个方程的根就是 $(\alpha + 3\beta, \alpha + \beta)$，把第一个方程的根依次代入，可以得到这个方程的根。

$(2,1) \to (5,3)$

$(7,4) \to (19,11)$

$(26,15) \to (71,41)$

$(97,56) \to (265,153)$

$(362,209) \to (989,571)$

$(1351,780) \to (3691,2131)$

$(5042,2911) \to (13775,7953)$

$(18817,10864) \to (51409,29681)$

$(70226,40545) \to (191861,110771)$

$(262087,151316) \to (716035,413403)$

$(978122,564719) \to (2672279,1542841)$

$(3650401,2107560) \to (9973081,5757961)$

$(13623482,7865521) \to (37220045,21489003)$

$(50843527,29354524) \to (138907099,80198051)$

$(189750626,109552575) \to (518408351,299303201)$

其中，第 4 组就是的 $(265,153)$. 由此得到 $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$.

综上所述

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点