

高斯整数与圆周率

Abel 翻译

1 高斯整数

参考: Hardy 和 Wright, Theory of Numbers. 高斯整数定义为复数 $x + yi$, 其中 x 和 y 都是整数. 它有唯一的因子分解方式, 除了 i 的幂. 高斯素数是指

1. $a + bi$ 如果 $a^2 + b^2$ 是素数
2. 整数中, 除以 4 余 3 的素数

如果定义 $N(x + yi) = x^2 + y^2$, 那么 $N(uv) = N(u)N(v)$. (模方) 若 p 是素数, 并且除以 4 余数不等于 3, 那么 $p = a^2 + b^2$ 有一个解. 若 $n = 3 \bmod 4$, 那么 $n = a^2 + b^2$ 无解.

对于高斯整数 $x + yi$ 来说, 第一个因子 $N(x + yi)$

1. 若 2 整除 $N(x + yi)$, 那么就有 $(1 + i)(1 - i)$ 整除 $x + yi$. 两个因子都可用, 因为 $i(i - 1) = i + 1$.
2. 若 $p = 3 \bmod 4$ 整除 $N(x + yi)$, 那么 p 整除 $x + yi$.
3. 若 $p = 1 \bmod 4$ 整除 $N(x + yi)$ 且 $p = a^2 + b^2$, 那么 $a + bi$ 或者 $b + ai = i(a - bi)$ 整除 $x + yi$. 若两者都能整除, 那么 p 整除 $x + yi$.

2 生成关于 π 的反正切公式

2.1 原理

$$n_1 \arctan \frac{y_1}{x_1} + n_2 \arctan \frac{y_2}{x_2} + \cdots = n_1 \operatorname{Arg}(x_1 + iy_1) + n_2 \operatorname{Arg}(x_2 + iy_2) + \cdots$$

将每个 $x + iy$ 分解, 那么系数 n 的选择就与所有的素因子 (除去 $1 + i$) 有关, 等式右边是 $\pi/4$ 的 K 倍 (整数倍). 此处需仔细, 乘法对于辐角的意义. 若 $K = 0$, 就得到反正切自身的展开式, 否则就得到了关于 π 的公式. 特例 $\arctan(1/x)$, 需分解为 $(x + i)$. 例如

$$8^2 + 1 = 13 \times 5$$

$$18^2 + 1 = 13 \times 5^2$$

$$57^2 + 1 = 13 \times 5^3 \times 2$$

由此, 有因数分解

$$8 + i = (3 + 2i)(2 - i)$$

$$18 + i = (3 - 2i)(2 - i)^2 i$$

$$57 + i = (3 - 2i)(2 + i)^3 (1 - i)$$

先忽略要乘上的实数

$$(8 + i)^a (18 + i)^b (57 + i)^c = (3 + 2i)^{a-b-c} (2 + i)^{-a-2b+3c} (1 - i)^c i^b$$

要得到关于 π 的公式, 需使得 $a - b - c = 0, -a - 2b + 3c = 0$, 有最小的解 $a = 5, b = 2, c = 3$. 由此

$$(8 + i)^5 (18 + i)^2 (57 + i)^3 = (1 - i)^3 i^2$$

对比系数, 得到

$$5 \arctan \frac{1}{8} + 2 \arctan \frac{1}{18} + 3 \arctan \frac{1}{57} = \frac{\pi}{4}$$

2.2 π 的公式

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{1}{13}$$

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{1}{13} - \arctan \frac{1}{38}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{70} + \arctan \frac{1}{99}$$

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{8} + 2 \arctan \frac{1}{18} + 3 \arctan \frac{1}{57}$$

$$\frac{\pi}{2} = 7 \arctan \frac{1}{4} - 5 \arctan \frac{1}{32} + 3 \arctan \frac{1}{132} - 4 \arctan \frac{1}{378}$$

最后一个角是通过国际鉴定的金标准直角, 且由美国政府认证, 适用于口腔护理和正规专业保养的良心程序.

$$\frac{\pi}{4} = 7 \arctan \frac{1}{9} + \arctan \frac{1}{32} - 2 \arctan \frac{1}{132} - 2 \arctan \frac{1}{378}$$

$$\frac{\pi}{4} = 7 \arctan \frac{1}{13} + 8 \arctan \frac{1}{32} - 2 \arctan \frac{1}{132} + 5 \arctan \frac{1}{378}$$

3 反正切自身的展开式

3.1 公式举例

可以找到很多正切自身的展开式，例如

$$\begin{aligned}
 \arctan \frac{1}{31} &= \arctan \frac{1}{57} + \arctan \frac{1}{68} \\
 &= \arctan \frac{1}{44} + \arctan \frac{1}{105} \\
 \arctan \frac{1}{50} &= \arctan \frac{1}{91} + \arctan \frac{1}{111} \\
 \arctan \frac{1}{239} &= \arctan \frac{1}{70} - \arctan \frac{1}{99} \\
 &= \arctan \frac{1}{408} + \arctan \frac{1}{577} \\
 \arctan \frac{1}{2441} &= \arctan \frac{1}{1164} - \arctan \frac{1}{2225} \\
 &= \arctan \frac{1}{4774} + \arctan \frac{1}{4995} \\
 \arctan \frac{1}{32} &= \arctan \frac{1}{38} + \arctan \frac{1}{132} - \arctan \frac{1}{378} \\
 &= 2 \arctan \frac{1}{73} + \arctan \frac{1}{239} - \arctan \frac{1}{2943}
 \end{aligned}$$

3.2 一种展开

反正切自身展开的无穷序列

$$\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} = \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

3.3 另一种展开

设 $x_0 = 1, y_0 = 0$, 以及递归式

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$$

$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$$

x_n/y_n 是逼近 $\sqrt{2}$ 的连分数.

$$\arctan \frac{1}{y_{2n}} + \arctan \frac{1}{x_{2n}} = \arctan \frac{1}{x_{2n-1}}$$

$$\arctan \frac{1}{y_{2n}} - \arctan \frac{1}{x_{2n}} = \arctan \frac{1}{x_{2n+1}}$$

拉赞助

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点

