

从割圆术中推导出的迭代公式

Abel

1 单纯内接多边形切割

从《割圆术》中，可以推导出圆内接多边形边长平方的递推公式

$$a_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}$$

例如，6 边形的边长是 1，它的平方还是 1，那么，内接正 12 边形的边长平方就是：

$$a_{12}^2 = 2 - \sqrt{4 - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

这个过程可以一直迭代下去，在需要求边长的时候再开方。

如果从内接正方形开始，公式的形式会美观一些，只有数字 2 出现。

$$a_4^2 = 2$$

$$a_8^2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$a_{16}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$a_{32}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

设 n 边形的一边所对的圆心角为 θ ，由余弦定理，有

$$a_n^2 = 2 - 2 \cos \theta$$

由此可见, 那一堆的根号对应着中心角余弦值的 2 倍。由半角公式, 有

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\cos \theta + 1}{2}}$$

$$2 \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{2 + 2 \cos \theta}$$

可以改写为:

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

这就是半角余弦二倍的递推公式.

2 内外两个方向切割

记内接 n 边形一边所对的中心角为 2θ , 则

$$2\theta = \frac{2\pi}{n}$$

$$\theta = \frac{\pi}{n}$$

内接 n 边形一边的长为 $2 \sin \theta$, 周长为 $2n \sin \theta$, 周长与直径的比为

$$f_n = \frac{2n \sin \theta}{2} = n \sin \theta$$

同理可得, 外接多边形周长与圆直径的比为

$$F_n = n \tan \theta$$

那么

$$f_{2n} = 2n \sin \frac{\theta}{2}$$

$$F_{2n} = 2n \tan \frac{\theta}{2}$$

即边数翻倍，角度减半.

将 f_n 和 F_n 作调和平均，得

$$\begin{aligned}\frac{2f_n F_n}{f_n + F_n} &= 2n \cdot \frac{\sin \theta \cdot \tan \theta}{\sin \theta + \tan \theta} \\ &= 2n \cdot \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= 2n \cdot \tan \frac{\theta}{2} \\ &= F_{2n}\end{aligned}$$

故

$$F_{2n} = \frac{2}{\frac{1}{f_n} + \frac{1}{F_n}}$$

将 F_{2n} 与 f_n 作几何平均，有

$$\begin{aligned}\sqrt{F_{2n} f_n} &= \sqrt{2n \tan \frac{\theta}{2} \cdot n \sin \theta} \\ &= 2n \sin \frac{\theta}{2} \\ &= f_{2n}\end{aligned}$$

故

$$f_{2n} = \sqrt{F_{2n} f_n}$$

综上，得到周长直径比率的迭代公式：

$$F_{2n} = \frac{2}{\frac{1}{f_n} + \frac{1}{F_n}} \quad (1)$$

$$f_{2n} = \sqrt{F_{2n} f_n} \quad (2)$$

3 连乘表达式

前文提及，设圆内接 n 边形的中心角为 2θ ，由此计算出来的周长与圆直径的比为

$$f_n = n \sin \theta$$

切割一次以后，

$$f_{2n} = 2n \sin \frac{\theta}{2}$$

两者作比，有

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{f_{2n}} &= \frac{n \sin \theta}{2n \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2n \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2n \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

即

$$\frac{f_n}{f_{2n}} = \cos \frac{\theta}{2}$$

那么，递推下去

$$\begin{aligned}\frac{f_n}{f_{2n}} &= \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{f_{2n}}{f_{4n}} &= \cos \frac{\theta}{4} \\ \frac{f_{4n}}{f_{8n}} &= \cos \frac{\theta}{8} \\ \frac{f_{8n}}{f_{16n}} &= \cos \frac{\theta}{16} \\ &\vdots \\ \frac{f_{\omega n/2}}{f_{\omega n}} &= \cos \frac{\theta}{\omega}\end{aligned}$$

把所有这些等式相乘，得到

$$\frac{f_n}{f_{\omega n}} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{6} \cos \frac{\theta}{8} \cdots \cos \frac{\theta}{\omega}$$

而最终的 $f_{\omega n}$ 是最接近 π 的，因此

$$\pi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{6} \cos \frac{\theta}{8} \cdots \cos \frac{\theta}{\omega}}$$

取初始值， $n = 4$ ，则 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ， $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $f_4 = 2\sqrt{2}$ 。

依据半角公式，以此计算切割后的角度余弦

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\cos \theta + 1}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\vdots$$

故

$$\begin{aligned} \pi &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdots \\ &= 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdots \end{aligned}$$

这样就得到了关于 π 的一个连乘表达式

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \cdots$$

也可以写作

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

这就是著名的韦达公式了.