

寻找 $\pi/4$ 展开式的万能公式

Abel

计算圆周率的时候，由于莱布尼兹展开式收敛过慢，人们就尝试用两个或多个角来组合 $\pi/4$. 人们找到过许多的关于 $\pi/4$ 的组合，例如

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7}$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239}$$

$\vdots$

欧拉告诉我们一个万能的公式，可以自由的寻找这种组合.

$$\arctan \frac{1}{x} = \arctan \frac{1}{x+y} + \arctan \frac{y}{x^2 + xy + 1}$$

证明可以用复数的乘法或者正切和角公式. 下面尝试一下使用这个公式可以得到什么结果.

最简单的，令 $x = 1, y = 1$ ，得到

$$\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

下面继续拆分 $\arctan(1/2)$, 令 $x = 2, y = 1$

$$\arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$$

如果把这个结果与上一步合并, 就得到

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$$

以此类推, 随意的赋值和拆分, 就可以得到无数的关于 $\pi/4$ 的拆分.

拉赞助

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点

