

详解割圆术

Abel

2022 年 8 月 27 日

目录

1	《九章算术》中的圆面积公式	4
2	圆周率的定义	4
3	刘徽的注释	4
3.1	古圆周率	4
3.2	面积公式的证明	5
4	从正六边形到正十二边形	7
4.1	勾股定理	7
4.2	古时候的单位	7
4.3	计算过程	8
5	迭代计算	9
5.1	从 12 边形到 24 边形	9

目录	2
5.2 从 24 边形到 48 边形	10
5.3 从 48 边形到 96 边形	10
6 给出圆周率的一个范围	10
6.1 神秘的实验	11
6.2 数据的现代呈现	12
7 更精确的计算	14
8 更深度的计算只是为了验证	14
9 小结	15
10 按照这个方法，用计算机继续计算下去	15
10.1 割 6 觚以为 12 觚术	15
10.2 割 12 觚以为 24 觚术	15
10.3 割 24 觚以为 48 觚术	16
10.4 割 48 觚以为 96 觚术	16
10.5 割 96 觚以为 192 觚术	17
10.6 割 192 觚以为 384 觚术	17
10.7 割 384 觚以为 768 觚术	17
10.8 割 768 觚以为 1536 觚术	18
10.9 割 1536 觚以为 3072 觚术	18
10.10 割 3072 觚以为 6144 觚术	18

10.11 割 6144 觚以为 12288 觚术	19
10.12 割 12288 觚以为 24576 觚术	19
10.13 割 24576 觚以为 49152 觚术	19
10.14 割 49152 觚以为 98304 觚术	20
10.15 割 98304 觚以为 196608 觚术	20
10.16 割 196608 觚以为 393216 觚术	20
10.17 割 393216 觚以为 786432 觚术	21
10.18 割 786432 觚以为 1572864 觚术	21
10.19 割 1572864 觚以为 3145728 觚术	21
10.20 割 3145728 觚以为 6291456 觚术	22
10.21 割 6291456 觚以为 12582912 觚术	22
10.22 割 12582912 觚以为 25165824 觚术	22
10.23 割 25165824 觚以为 50331648 觚术	23
10.24 割 50331648 觚以为 100663296 觚术	23

1 《九章算术》中的圆面积公式

术曰：半周半径相乘得积步。

《九章算术》中，关于圆的面积公式，圆周长的一半与半径相乘，得到圆的面积。现代表示方法：周长记为 $C = 2\pi r$ ，半径记为 r ，面积 $S = \frac{C}{2} * r$ ，结果仍然是 $S = \pi r^2$ 。尊重传统，把圆的面积公式写作：

$$S = \frac{1}{2}Cr$$

2 圆周率的定义

在几何学中，圆周率（ π ）的定义是圆的周长与直径的比值。

一般用希腊字母 π 表示，是一个在数学及物理学中普遍存在的数学常数。 π 也等于圆形之面积与半径平方之比，是精确计算圆周长、圆面积、球体积等几何形状的关键值。

在分析学里， π 可以严格地定义为满足 $\sin x = 0$ 的最小正数 x 。

3 刘徽的注释

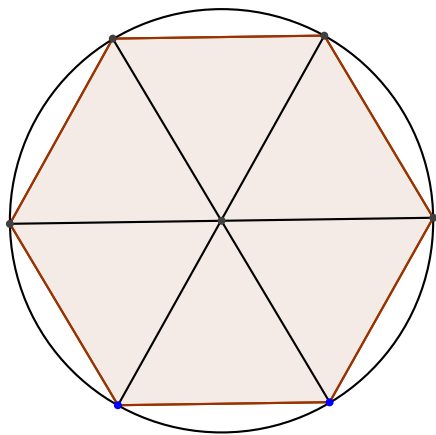
割圆术出现在刘徽对《九章算术》的注释中。用“按”字开头，表示“注释”的意思。

3.1 古圆周率

按：半周为从，半径为广，故广从相乘为积步也。假令圆径二尺，圆中容六觚之一面，与圆径之半，其数均等。合径率一而外周率三也。

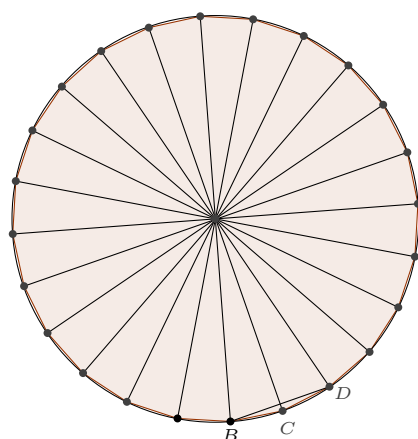
译：周长的一半乘以半径，得到圆的面积。假如圆的直径是 2 尺，圆中有内接正六边形，正六边形的一边长度恰好等于圆的半径。假如用这个正六边形

的周长代替圆的周长，则符合“周三径一”的古圆周率。



3.2 面积公式的证明

又按：为图，以六觚之一面乘一弧半径，三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘一弧之半径，六之，则得二十四觚之幂。割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。觚面之外，又有余径。以面乘余径，则幂出觚表。若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径。表无余径，则幂不外出矣。以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。



译：作图，用圆内接正 6 边形的一边长乘以半径，再乘以 3，就得到正 12 边形的面积。如果再切割一次，用正 12 边形的一边乘以圆的半径，再乘以 6，就可以得到正 24 边形的面积。分割的越细，正多边形与圆面积的差就越小。一直分割下去，直到不可分割的地步，则正多边形与圆就几乎重合了，面积就基本没有差别了。正多边形之外，还有超出的半径，称其为余径，用余径乘以正多边形的边长，加到正多边形的面积上，那么总面积又比圆稍大了。假如正多边形的边长极小，就可以与圆几乎重合了，那么正多边形之外的余径就可以忽略不计了。忽略不计余径，加上余径乘以半径的面积也不会超出圆面积了。将圆切割成无穷多个微小的等腰三角形，用边长乘以半径，得面积的两倍。（累加以后，圆的周长乘以半径就是圆面积的两倍。）因此，半周乘以半径是圆的面积。（这个证明用到了极限思想。）

此以周、径，谓至然之数，非周三径一之率也。周三者，从其六觚之环耳。以推圆规多少之觉，乃弓之与弦也。然世传此法，莫肯精核；学者踵古，习其谬失。不有明据，辩之斯难。凡物类形象，不圆则方。方圆之率，诚著于近，则虽远可知也。由此言之，其用博矣。谨按图验，更造密率。恐空设法，数昧而难譬，故置诸检括，谨详其记注焉。

译：这里所用的圆周和直径，说的是非常精确的数值，而不是周三径一之率，周 3，只符合正 6 边形的周长，用来推算与圆周多少的差别，就像弓与弦一样。然而世代传袭这一方法，不肯精确地核验；学者跟随古人的脚步，沿他们的谬失。没有明晰的证据，辩论这个问题就很困难。凡是事物的形象，

不是圆的，就是方的。方率与圆率，如果在切近处确实很明显，那么即使在地远处也是可以知道的。由此说来，它的应用是非常广博的。我谨借助图形作为验证，提出计算精密圆周率值的方法。我担心凭空设立一种方法数值不清晰而且使人难以通晓，因此把它置于一个法度之中，谨详细地写下这个注释。

4 从正六边形到正十二边形

割六觚以为十二觚术曰：置圆径二尺，半之为尺，即圆里觚之面也。令半径一尺为弦，半面五寸为句，为之求股。以句幂二十五寸减弦幂，余七十五寸，开方除之，下至秒、忽。又一退法，求其微数。微数无名知以为分子，以十为分母，约作五分忽之二。故得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二 (0.8660254)。以减半径，余一寸三分三厘九毫七秒四忽五分忽之三 (0.1339746)，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求弦。其幂二千六百七十九亿四千九百一十九万三千四百四十五忽 (0.267949193445)，余分弃之。开方除之，即十二觚之一面也。

4.1 勾股定理

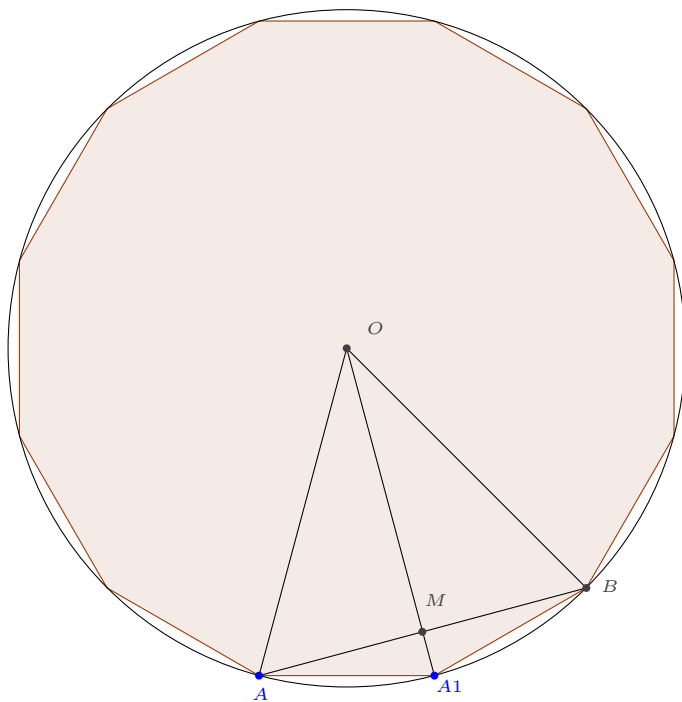
直角三角形的两条直角边分别称为“勾”和“股”，斜边称为“弦”。“句”通“勾”。这里所有的数据都是用勾股定理计算出的。直角三角形的斜边“弦”应与圆的弦区分开。

4.2 古时候的单位

那个时代似乎没有使用小数，只有整数和分数。单位依然是十进制。从大到小依次是“尺、寸、分、厘、毫、秒、忽”。

4.3 计算过程

如图，设圆的直径为 2，则半径为 1。作圆 O 的内接正六边形。内接正六边形的一边为 AB ，取弧 AB 的中点 A_1 ，连接 AA_1 ，连接 OA_1 ，设 OA_1 交 AB 于点 M 。求 AA_1 。



解：同时记点 B 为 A_0 ,

$$AA_0 = 1$$

$$AM = \frac{1}{2}AA_0$$

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}AA_0\right)^2$$

$$OM = \sqrt{1 - \frac{1}{4}AA_0^2}$$

$$MA_1 = OA_1 - OM = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}AA_0^2}$$

$$\begin{aligned} AA_1^2 &= MA_1^2 + AM^2 \\ &= \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}AA_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AA_0\right)^2 \\ &= 2 - \sqrt{4 - AA_0^2} \end{aligned}$$

于是得到边长平方的递推公式 $a_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}$ 。由此可以计算边长。 N 边形的边长乘以 $\frac{N}{2}$ 可以得到 $2N$ 边形的面积。以下的程序重复这一过程。

5 迭代计算

5.1 从 12 边形到 24 边形

割十二觚以为二十四觚术曰：亦令半径为弦，半面为句，为之求股。置上小弦幂，四而一，得六百六十九亿八千七百二十九万八千三百六十一忽 (0.066987298361)，余分弃之，即句幂也。以减弦幂，其余开方除之，得股九寸六分五厘九毫二秒五忽五分忽之一 (0.9659258)。以减半径，余三分四厘七秒四忽五分忽之一 (0.0340742)，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂六百八十一亿四千八百三十四万九千四百六十六忽

(0.068148349466)，余分弃之。开方除之，即二十四觚之一面也。

5.2 从 24 边形到 48 边形

割二十四觚以为四十八觚术曰：亦令半径为弦，半面为句，为之求股。置上小弦幂，四而一，得一百七十亿三千七百八万七千三百六十六忽(0.017037087366)，余分弃之，即句幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸九分一厘四毫四秒四忽五分忽之四 (0.9914448)。以减半径，余八厘五毫五秒五忽五分忽之一 (0.0085552)，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂一百七十一亿一千二十七万八千八百一十三忽 (0.017110278813)，余分弃之。开方除之，得小弦一寸三分八毫六忽 (0.130806)，余分弃之，即四十八觚之一面。以半径一尺乘之，又以二十四乘之，得幂三万一千三百九十三亿四千四百万忽 (3.139344)。以百亿除之，得幂三百一十三寸六百二十五分寸之五百八十四 ($313 + \frac{584}{625}$)，即**九十六觚之幂**也。

5.3 从 48 边形到 96 边形

割四十八觚以为九十六觚术曰：亦令半径为弦，半面为句，为之求股。置次上弦幂，四而一，得四十二亿七千七百五十六万九千七百三忽(0.004277569703)，余分弃之，即句幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸九分七厘八毫五秒八忽十分忽之九 (0.9978589)。以减半径，余二厘一毫四秒一忽十分忽之一 (0.0021411)，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂四十二亿八千二百一十五万四千一十二忽 (0.004282154012)，余分弃之。开方除之，得小弦六分五厘四毫三秒八忽 (0.065438)，余分弃之，即九十六觚之一面。

6 给出圆周率的一个范围

以半径一尺乘之，又以四十八乘之，得幂三万一千四百一十亿二千四百万忽 (3.141024)，以百亿除之，得幂三百一十四寸六百二十五分寸之六十四 ($314 + \frac{64}{625}$)，即**一百九十二觚之幂**也。以九十六觚之幂减之，余六百二十五

分寸之一百五 ($\frac{105}{625}$), 谓之差幂。倍之, 为分寸之二百一十 ($\frac{210}{625}$), 即九十六觚之外弧田九十六所, 谓以弦乘矢之凡幂也。加此幂于九十六觚之幂, 得三百一十四寸六百二十五分寸之一百六十九 ($314 + \frac{169}{625}$), 则出圆之表矣。故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸 (314) 以为圆幂之定率而弃其余分。

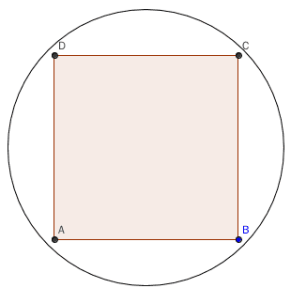
以半径一尺除圆幂, 倍之, 得六尺二寸八分, 即周数。令径自乘为方幂四百寸, 与圆幂相折, 圆幂得一百五十七为率, 方幂得二百为率。方幂二百其中容圆幂一百五十七也。圆率犹为微少。

案: 弧田图令方中容圆, 圆中容方, 内方合外方之半。然则圆幂一百五十七, 其中容方幂一百也。又令径二尺与周六尺二寸八分相约, 周得一百五十七, 径得五十, 则其相与之率也。周率犹为微少也。

6.1 神秘的实验

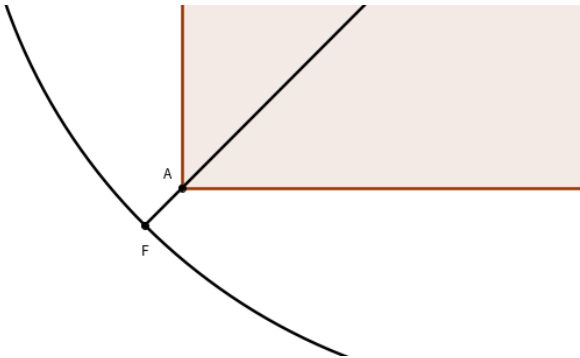
晋武库中汉时王莽作铜斛, 其铭曰: 律嘉量斛, 内方尺而圆其外, 庀旁九厘五毫, 幂一百六十二寸, 深一尺, 积一千六百二十寸, 容十斗。以此术求之, 得幂一百六十一寸有奇, 其数相近矣。此术微少。

刘徽计算过程中, 找了一个神秘的东西做实验, 那东西叫“铜斛”, 是王莽时候官方的一个量器。外面是圆柱形, 里面是立方体。



关键是, 铜斛上刻了文字, “冥百六十二寸”, 就是说底面积 162 平方寸。那

么，这个铜斛到底有多大呢？里面的正方形，据铭文说，正方形边长 10 寸。



而且，外面的圆比正方形大一点点，叫“庌旁九厘五毫”，如上图， AF 的长度是 0.095 寸。刘徽用这个来验证圆周率。根据上面正方形边长的数据，和庌旁，计算圆的半径是 $1.4142135 \times 10 / 2 + 0.095 = 7.1660676$

用刘徽的圆周率算面积： $3.14 * 7.1660676 * 7.1660676 = 161.24693$

比 162 平方寸少一点点。

6.2 数据的现代呈现

正多边形	边长的平方	边长	面积
6	1	1	
12	0.2679491924311	0.5176380902050	
24	0.0681483474219	0.2610523844401	3.1058285412303
48	0.0171102772524	0.1308062584603	3.1326286132812
96	0.0042821535228	0.0654381656436	3.1393502030469
192	0.0010708250473	0.0327234632530	3.1410319508905
384	0.0002677241809	0.0163622792079	3.1414524722853
768	0.0000669321652	0.0081812080525	3.1415576079116
1536	0.0000167331113	0.0040906125823	3.1415838921489
3072	0.0000041832822	0.0020453073607	3.1415904632368
6144	0.0000010458208	0.0010226538140	3.1415921060431
12288	0.0000002614552	0.0005113269236	3.1415925165882
24576	0.0000000653638	0.0002556634640	3.1415926186408
49152	0.0000000163410	0.0001278317320	3.1415926453212
98304	0.0000000040852	0.0000639158660	3.1415926453212

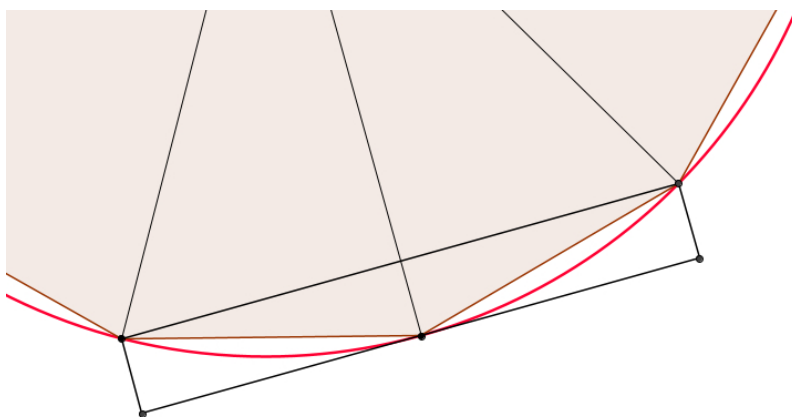
其中，刘徽计算 96 边形的面积为 3.139344，192 边形的面积为 3.141024，与上图的数据仅在末尾处有少许出入。

$$S_{96} = 313 + \frac{584}{625}$$

$$S_{192} = 314 + \frac{64}{625}$$

$$\Delta = S_{192} - S_{96} = \frac{105}{625}$$

$$S_{96} + 2\Delta = 314 + \frac{169}{625}$$



把差值的两倍加在 96 边形的面积上，得到 $314 + \frac{169}{625}$ 就超出了圆周。由此，可以得知：

$$314 + \frac{64}{625} < 100\pi < 314 + \frac{169}{625}$$

因此，整数部分 314 是确定无疑的。“故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸 (314) 以为圆幂之定率而弃其余分”。同时指出，314 这个值是偏小的，“圆率犹为微少”。

7 更精确的计算

而觚差幂六百二十五分寸之一百五。以一百九十二觚之幂为率消息，当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂，以为圆幂，三百一十四寸二十五分寸之四。

前文提到了圆周率的范围：

$$314 + \frac{64}{625} < 100\pi < 314 + \frac{169}{625}$$

刘徽根据这个范围，然后“观阴阳之割裂”，在 192 边形的面积上进行“消息”，神奇的提出 36 这个数字，用来获得圆的面积：

$$314 + \frac{64}{625} + \frac{36}{625} = 314 + \frac{100}{625} \quad (1)$$

$$= 314 + \frac{4}{25} \quad (2)$$

这个结果对应于 3.1416 的圆周率。

至于为什么会选择 36 这个数字，刘徽必然进行了更深度的计算，后文会提及。这个“消息法”堪称割圆术的神来之笔，具体怎样消息，后人就无从知晓了。

8 更深度的计算只是为了验证

置径自乘之方幂四百寸，令与圆幂通相约，圆幂三千九百二十七，方幂得五千，是为率。方幂五千中容圆幂三千九百二十七；圆幂三千九百二十七中容方幂二千五百也。以半径一尺除圆幂三百一十四寸二十五分寸之四，倍之，得六尺二寸八分二十五分分之八，即周数也。全径二尺与周数通相约，径得一千二百五十，周得三千九百二十七，即其相与之率。若此者，盖尽其纤微矣。举而用之，上法仍约耳。当求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之幂，而裁其微分，数亦宜然，重其验耳。

这一段表明，刘徽计算到 1536 边形的边长，可能获得了 3072 边形的面积 3.141590463228，证明了圆周率的近似值 3.1416 的可靠。

9 小结

刘徽在割圆术中，应用到下列技能或方法

- 用无穷小和极限的思想证明了圆面积公式 $S = \frac{1}{2}Cr$
- 强大的计算能力，包括开方技术
- 扩展长度单位，发明“无名微数”
- 精确的估值与插值
- 严谨的验算
- 迭代程序

10 按照这个方法，用计算机继续计算下去

10.1 割 6 觚以为 12 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.2500000000000000，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.866025403784439

以减半径，余 0.133974596215561，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.267949192431123，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.517638090205042，余分弃之，即 12 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 6 乘之，得幂 3.105828541230249，即 24 觚之幂也。

)

10.2 割 12 觚以为 24 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.066987298107781，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.965925826289068

以减半径，余 0.034074173710932，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.068148347421863，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.261052384440103，余分弃之，即 24 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 12 乘之，得幂 3.132628613281238，即 48 觚之幂也。)

10.3 割 24 觚以为 48 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.017037086855466，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.991444861373810

以减半径，余 0.008555138626190，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.017110277252379，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.130806258460286，余分弃之，即 48 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 24 乘之，得幂 3.139350203046867，即 96 觚之幂也。)

10.4 割 48 觚以为 96 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.004277569313095，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.997858923238604

以减半径，余 0.002141076761396，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.004282153522793，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.065438165643552，余分弃之，即 96 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 48 乘之，得幂 3.141031950890510，即 192 觚之幂也。)

10.5 割 96 觚以为 192 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.001070538380698，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999464587476366

以减半径，余 0.000535412523634，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.001070825047269，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.032723463252974，余分弃之，即 192 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 96 乘之，得幂 3.141452472285462，即 384 觚之幂也。)

10.6 割 192 觚以为 384 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000267706261817，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999866137909562

以减半径，余 0.000133862090438，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000267724180876，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.016362279207874，余分弃之，即 384 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 192 乘之，得幂 3.141557607911858，即 768 觚之幂也。)

10.7 割 384 觚以为 768 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000066931045219，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999966533917401

以减半径，余 0.000033466082599，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000066932165198，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.008181208052470，余分弃之，即 768 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 384 乘之，得幂 3.141583892148318，即 1536 觚之幂也。)

10.8 割 768 觚以为 1536 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000016733041299，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999991633444351

以减半径，余 0.000008366555649，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000016733111299，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.004090612582328，余分弃之，即 1536 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 768 乘之，得幂 3.141590463228050，即 3072 觚之幂也。)

10.9 割 1536 觚以为 3072 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000004183277825，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999997908358900

以减半径，余 0.000002091641100，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000004183282200，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.002045307360677，余分弃之，即 3072 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 1536 乘之，得幂 3.141592105999272，即 6144 觚之幂也。)

10.10 割 3072 觚以为 6144 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000001045820550，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999477089588

以减半径，余 0.000000522910412，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000001045820823，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.001022653814027，余分弃之，即 6144 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 3072 乘之，得幂 3.141592516692157，即 12288 觚之幂也。)

10.11 割 6144 觚以为 12288 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000261455206，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999869272389

以减半径，余 0.000000130727611，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000261455223，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000511326923725，余分弃之，即 12288 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 6144 乘之，得幂 3.141592619365384，即 24576 觚之幂也。)

10.12 割 12288 觚以为 24576 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000065363806，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999967318097

以减半径，余 0.000000032681903，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000065363807，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000255663463951，余分弃之，即 24576 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 12288 乘之，得幂 3.141592645033691，即 49152 觚之幂也。)

10.13 割 24576 觚以为 49152 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000016340952，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999991829524

以减半径，余 0.000000008170476，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000016340952，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000127831732237，余分弃之，即 49152 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 24576 乘之，得幂 3.141592651450768，即 98304 觚之幂也。)

10.14 割 49152 觚以为 98304 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000004085238，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999997957381

以减半径，余 0.000000002042619，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000004085238，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000063915866151，余分弃之，即 98304 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 49152 乘之，得幂 3.141592653055037，即 196608 觚之幂也。)

10.15 割 98304 觚以为 196608 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000001021309，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999999489345

以减半径，余 0.000000000510655，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000001021309，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000031957933080，余分弃之，即 196608 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 98304 乘之，得幂 3.141592653456104，即 393216 觚之幂也。)

10.16 割 196608 觚以为 393216 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000000255327，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999999872336

以减半径，余 0.000000000127664，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000000255327，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000015978966540，余分弃之，即 393216 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 196608 乘之，得幂 3.141592653556371，即 786432 觚之幂也。)

10.17 割 393216 觚以为 786432 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000000063832，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999999968084

以减半径，余 0.000000000031916，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000000063832，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000007989483270，余分弃之，即 786432 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 393216 乘之，得幂 3.141592653581438，即 1572864

觚之幂也。)

10.18 割 786432 觚以为 1572864 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000000015958，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.99999999992021

以减半径，余 0.00000000007979，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000000015958，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000003994741635，余分弃之，即 1572864 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 786432 乘之，得幂 3.141592653587704，即 3145728

觚之幂也。)

10.19 割 1572864 觚以为 3145728 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000000003989，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.99999999998005

以减半径，余 0.00000000001995，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000000003989，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000001997370818，余分弃之，即 3145728 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 1572864 乘之，得幂 3.141592653589271，即 6291456

觚之幂也。)

10.20 割 3145728 觚以为 6291456 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000000000997，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.99999999999501

以减半径，余 0.000000000000499，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000000000997，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000000998685409，余分弃之，即 6291456 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 3145728 乘之，得幂 3.141592653589663，即 12582912

觚之幂也。)

10.21 割 6291456 觚以为 12582912 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000000000249，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.99999999999875

以减半径，余 0.000000000000125，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000000000249，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000000499342704，余分弃之，即 12582912 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 6291456 乘之，得幂 3.141592653589761，即 25165824

觚之幂也。)

10.22 割 12582912 觚以为 25165824 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000000000062，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.99999999999969

以减半径，余 0.000000000000031，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000000000062，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000000249671352，余分弃之，即 25165824 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 12582912 乘之，得幂 3.141592653589785，即 50331648

觚之幂也。)

10.23 割 25165824 觚以为 50331648 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000000000016，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999999999992

以减半径，余 0.000000000000008，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000000000016，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000000124835676，余分弃之，即 50331648 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 25165824 乘之，得幂 3.141592653589791，即 100663296

觚之幂也。)

10.24 割 50331648 觚以为 100663296 觚术

曰：令半径为弦，半面为勾，为之求股：

置上小弦幂，四而一，得 0.000000000000004，余分弃之，即勾幂。

以减弦幂，开方除之，得股 0.999999999999998

以减半径，余 0.000000000000002，谓之小勾。

觚之半面又谓之小股，为之求小弦，其幂 0.000000000000004，余分弃之。

(开方除之，得小弦 0.000000062417838，余分弃之，即 100663296 觚之一面。

以半径一尺乘之，又以 50331648 乘之，得幂 3.141592653589793，即 201326592

觚之幂也。)

拉赞助

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点。

