

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$$

$$\theta = \angle AOC = \frac{\pi}{n}$$

$$AM = \sin \theta$$

$$AB = 2 \sin \theta$$

$$C_n = nAB = 2n \sin \theta$$

$$S_{2n} = \frac{1}{2}C_n = n \sin \theta$$

按照刘徽计算的程序,

$$OM = \cos \theta$$

$$MC = 1 - \cos \theta$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot MC$$

$$= \frac{1}{2}(2 \sin \theta)(1 - \cos \theta)$$

$$= \sin \theta(1 - \cos \theta)$$

这个面积的 n 倍加在 $2n$ 边形的面积上, 将大于圆的面积, 即

$$n \sin \theta(1 - \cos \theta) + n \sin \theta > \pi$$

等式两边除以 n , 得到

$$\sin \theta(1 - \cos \theta) + \sin \theta > \frac{\pi}{n}$$

$$\sin \theta(2 - \cos \theta) > \theta$$

由此, 用 x 替换 θ , 得到一个不等式当 $x > 0$ 时,

$$\sin x(2 - \cos x) > x$$

或者这样书写:

$$x < \sin x(2 - \cos x)$$

3 不等式

学习微积分的时候, 会接触到一个不等式, $\sin x < x < \tan x$, 上面求到的 $\sin x(2 - \cos x)$ 将会插在 x 与 $\tan x$ 之间.

3.1 证明 $\sin x(2 - \cos x) < \tan x$

证明. 欲证 $\sin x(2 - \cos x) < \tan x$

转证 $\sin x(2 - \cos x) < \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow 2 - \cos x < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \frac{1}{\cos x} > 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x + 1/(\cos x)}{2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x + 1/(\cos x)}{2} > \sqrt{\cos x \cdot \frac{1}{\cos x}} = 1 \quad (x > 0, \text{原不等式“大于等于”处不取等号}) \quad \square$$

3.2 证明 $x < \sin x(2 - \cos x)$

证明. 构造函数 $f(x) = \sin x(2 - \cos x) - x$

求导数

$$f'(x) = 2 \cos x(1 - \cos x) \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$f'(x) \geq 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) > f(0) = 0$.

$\therefore \sin x(2 - \cos x) - x > 0$

$\therefore \sin x(2 - \cos x) > x$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立. □

综上, 有

$$\sin x < x < \sin x(2 - \cos x) < \tan x \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}])$$