高斯积分的简略证明

Abel

网络上广为流传的一个积分公式是这样的,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

多种证明方法中,最简洁的还是使用二重积分.

证明. 令

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy \end{aligned}$$

然后换用极坐标

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ dx &= dr \\ dy &= r d\theta \end{aligned}$$

因此

$$dxdy = rd\theta dr$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

用换元法，令

$$u = r^2$$

$$du = 2rdr \rightarrow dr = \frac{du}{2r}$$

$$I^2 = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-u} \frac{du}{2r}$$

$$= \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du$$

$$= \pi[-(0-1)]$$
$$= \pi$$

所以

$$I = \sqrt{\pi}$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$\square$

拉赞助

如果你觉得本文对你有所启发，可以随意赞助一点